CANPOINT®

全品智能作业

QUANPIN ZHINENGZUOYE

高中数学

选择性必修第二册

RJA

主 编：肖德好

天津出版传媒集团
天津人民出版社

CONTENTS

全品智能作业 · 数学 RJA

04 第四章 数列

05 第五章　一元函数的导数及其应用

素养测评卷

第四章　数列

4.1　数列的概念

第1课时　数列的概念与通项公式

基础夯实篇

1. 下列说法中正确的是　(　　)

A. 数列的通项公式是唯一的

B. 每个数列都有通项公式

C. 数列可以看作一个定义在正整数集上的函数

D. 数列的图象是坐标平面上有限或无限个离散的点

2. 已知 $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}$,则 $a_3=$　(　　)

A. $\frac{1}{6}$

B. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

C. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$

D. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$

3. 数列 1,2,5,…的一个通项公式可能为　(　　)

A. $a_n=n$　　B. $a_n=2^n-1$

C. $a_n=2n-1$　　D. $a_n=2^n-n$

4. 下列通项公式对应的数列$\{a_n\}$是递增数列的是　(　　)

A. $a_n=1-n$

B. $a_n=\frac{1}{4^n}$

C. $a_n=2n^2-5n+1$

D. $a_n=\begin{cases}n+3, n\leqslant 2,\\ 2^{n-1}, n>2\end{cases}$

5. 已知数列 $-1,\frac{\sqrt{2}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{5},\frac{2}{7},\cdots$,则该数列的第 211 项为　(　　)

A. $-\frac{\sqrt{211}}{421}$　　B. $\frac{\sqrt{211}}{421}$

C. $-\frac{\sqrt{210}}{423}$　　D. $\frac{\sqrt{210}}{423}$

6. [2024·山东实验中学高二月考] 函数 $f(x)$的定义域为$[1,+\infty)$,数列$\{a_n\}$满足 $a_n=f(n)$,则"函数 $f(x)$为减函数"是"数列$\{a_n\}$为递减数列"的　(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

7. 观察数列 2^1,ln 2,cos 3,2^4,ln 5,cos 6,2^7,ln 8,cos 9,…,则该数列的第 20 项为________.

8. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=\sqrt{2n-1}\,(n\in\mathbf{N}^*)$,则 7 是该数列中的第________项.

素养提能篇

9. 数列 0.4,0.44,0.444,0.444 4,…的一个通项公式是 $a_n=$　(　　)

A. $\frac{4}{9}(10^n-1)$　　B. $\frac{1}{4}(10^n-1)$

C. $\frac{4}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$　　D. $\frac{2}{5}(10^n-1)$

10. 数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\begin{cases}(7-t)n+4, n\leqslant 4,\\ t^{n-3}, n>4,\end{cases}$ 若$\{a_n\}$是递增数列,则实数 t 的取值范围是　(　　)

A. $(4,7)$　　B. $\left(\frac{32}{5},7\right)$

C. $\left[\frac{32}{5},7\right)$　　D. $(1,7)$

11. (多选题)[2024·广东实验中学高二期末] 已知数列$\{a_n\}$的前 5 项依次为 2,0,2,0,2,则下列可以作为数列$\{a_n\}$的通项公式的有　(　　)

A. $a_n=\begin{cases}2, n\text{ 为奇数},\\ 0, n\text{ 为偶数}\end{cases}$

B. $a_n=(-1)^n+1$

C. $a_n=2\left|\sin\frac{n\pi}{2}\right|$

D. $a_n=4\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right|$

12. (多选题)[2024·甘肃白银大成学校高二月考]下面四个数列中,既是无穷数列又是递增数列的是 ( )

A. $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$

B. $-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\cdots,-\frac{1}{2^{n-1}},\cdots$

C. $\sin\frac{\pi}{7},\sin\frac{2\pi}{7},\sin\frac{3\pi}{7},\cdots,\sin\frac{n\pi}{7},\cdots$

D. $1,\sqrt{2},\sqrt{3},\cdots,\sqrt{n},\cdots$

13. 已知 $a_n=\lambda n-\lambda$,若"对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$,$\{a_n\}$ 恒为递减数列"是真命题,则整数 λ 的值可以是________.(写出一个符合要求的答案即可)

14. 观察下面数列的变化规律,用适当的数填空,并写出每个数列的一个通项公式.

(1)( ),7,12,( ),22,27,…;

(2)$-1,\frac{1}{2}$,( ),$\frac{1}{4},-\frac{1}{5},\frac{1}{6}$,( ),…;

(3)$1,\sqrt{2}$,( ),$2,\sqrt{5}$,( ),$\sqrt{7}$,…;

(4)$\frac{1}{1\times2},\frac{1}{2\times3}$,( ),$\frac{1}{4\times5}$,….

15. 根据下列数列$\{a_n\}$的通项公式,写出数列的前5项,并画出它们的图象.

(1)$a_n=\frac{n-1}{n}$;

(2)$a_n=(-1)^n$;

(3)$a_n=3-n$.

思维训练篇

16. 记不超过 x 的最大整数为$[x]$,如$[-0.5]=-1$,$[\pi]=3$.已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\left[\log_2\frac{8}{n}\right]$,则使$a_n\geqslant0$ 的正整数 n 的最大值为( )

A. 5　　B. 6　　C. 8　　D. 16

17. (多选题)已知欧拉函数 $\varphi(n)(n\in\mathbf{N}^*)$的函数值等于所有不超过正整数 n 且与 n 互质的正整数的个数.例如:$\varphi(1)=1$,$\varphi(4)=2$.设数列$\{a_n\}$中,$a_n=\varphi(n)(n\in\mathbf{N}^*)$,则 ( )

A. 数列$\{a_n\}$是递增数列

B. $\{a_n\}$前8项中的最大项为 a_7

C. 当 n 为质数时,$a_n=n-1$

D. 当 n 为偶数时,$a_n=\frac{n}{2}$

18. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=(n+1)\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$,试问数列$\{a_n\}$有没有最大项?若有,求出最大项和最大项的序号;若没有,说明理由.

第 2 课时　数列的递推公式与前 n 项和

基础夯实篇

1. 数列$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots$的递推公式可以是　(　　)

A. $a_n=\frac{1}{2^{n+1}}(n\in\mathbf{N}^*)$

B. $a_n=\frac{1}{2n}(n\in\mathbf{N}^*)$

C. $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n(n\in\mathbf{N}^*)$

D. $a_{n+1}=2a_n(n\in\mathbf{N}^*)$

2. 已知在数列$\{a_n\}$中，$a_1=3,a_2=6,a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，则$a_5=$　(　　)

A. 9　　B. 15

C. 24　　D. 39

3. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和$S_n=n^2$，则$a_4+a_5=$　(　　)

A. 48　　B. 32

C. 16　　D. 8

4. [2024・成都高二期中] 若数列$\{a_n\}$满足$a_1=3$，$a_{n+1}=2a_n-n+1$，则$a_2+a_3+a_4=$　(　　)

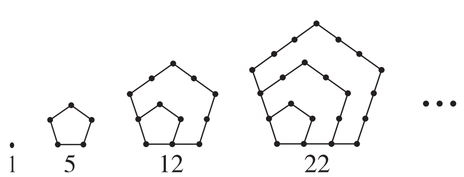
A. 6　　B. 14　　C. 22　　D. 37

5. 若数列$\{a_n\}$满足$a_n=2^{a_{n+1}}-n^2$，$a_1=1$，则$a_3=$　(　　)

A. 1　　B. $\log_2 3$

C. $\sqrt{5}$　　D. $\log_2 5$

6. [2024・武汉高二期中] 已知下列图形中点的个数按照从左到右的顺序构成数列$\{a_n\}$，则$a_5=$　(　　)



A. 32　　B. 35

C. 36　　D. 42

7. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=n+1$，则$a_3=$________.

8. [2024・石家庄一中高二月考] 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和$S_n=3^n-2$，则$a_n=$________.

素养提能篇

9. [2024・福州一中高二月考] 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，且满足$a_1=2,a_{n+1}=1-\frac{1}{a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$，则$2S_{2024}=$　(　　)

A. 2024　　B. 2025

C. 2026　　D. 2027

10. [2024・石家庄高二期末] 斐波那契数列因意大利数学家斐波那契以兔子繁殖为例引入，故又称为“兔子数列”，即 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,⋯. 在实际生活中，很多花朵(如梅花、飞燕草、万寿菊等)的瓣数恰是斐波那契数列中的数，斐波那契数列在现代物理及化学等领域也有着广泛的应用. 斐波那契数列$\{a_n\}$满足$a_1=a_2=1,a_{n+2}=a_{n+1}+a_n(n\in\mathrm{N}^*)$，则$1+a_3+a_5+a_7+\cdots+a_{2025}$是斐波那契数列$\{a_n\}$中的　(　　)

A. 第 2023 项　　B. 第 2024 项

C. 第 2025 项　　D. 第 2026 项

11. (多选题)已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和$S_n=\frac{n}{n+1}$，则下列说法正确的是　(　　)

A. $a_1=\frac{1}{2}$

B. 数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{1}{n(n+1)}$

C. 数列$\{a_n\}$为递减数列

D. 数列$\{a_n\}$为递增数列

12. (多选题)在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1,a_n\cdot a_{n+1}=3^n$，$n\in\mathbf{N}^*$，则下列说法正确的是　(　　)

A. $a_4=9$

B. $\frac{a_{n+2}}{a_n}$的值为常数

C. $a_{2n}-a_{2n-1}=2\times3^n$

D. $a_{2n}+a_{2n-1}=4\times3^{n-1}$

13. 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，且$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n=n^2(n\geqslant2)$，则$a_3+a_5=$________.

14. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{6}{7}$，$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n,0\leqslant a_n<\frac{1}{2},\\2a_n-1,\frac{1}{2}\leqslant a_n<1,\end{cases}$求$a_{2023}+a_{2024}$的值.

15. 设各项均为正数的数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n^2-(n^2+n-3)S_n-3(n^2+n)=0,n\in\mathbf{N}^*$.

(1)求a_1的值;

(2)求数列$\{a_n\}$的通项公式.

思维训练篇

16. (多选题)[2024·山东菏泽三中高二月考]已知函数$f(x)=\begin{cases}x+\frac{1}{2},x\leqslant\frac{1}{2},\\2x-1,\frac{1}{2}<x<1,\\x-1,x\geqslant 1,\end{cases}$若数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{7}{3},a_{n+1}=f(a_n),n\in\mathbf{N}^*$,则下列说法正确的是 ( )

A. 数列$\{a_n\}$是周期数列且周期为3

B. 数列$\{a_n\}$不是周期数列

C. $a_{2023}+a_{2024}=\frac{3}{2}$

D. $a_{2023}+a_{2024}=\frac{7}{6}$

17. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=\frac{n^2+n}{2}$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)若对任意的正整数n,$\frac{b_1}{a_1}\cdot\frac{b_2}{a_2}\cdot\frac{b_3}{a_3}\cdot\cdots\cdot\frac{b_n}{a_n}=(n+1)^2$恒成立,求证:$b_n\geqslant 4$.

4.2　等差数列

4.2.1　等差数列的概念

第1课时　等差数列的概念与通项公式

基础夯实篇

1. 已知数列$\{a_n\}$是公差为-2的等差数列，$a_3=5$，则$a_1=$　　(　　)

A. 1　　B. 3

C. 6　　D. 9

2. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_6=5$，$a_{10}=6$，则公差d等于　　(　　)

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. $-\frac{1}{2}$

3. 若$2a+1$是$a-1$与$4a-2$的等差中项，则实数a的值为　　(　　)

A. $-\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{10}$　　C. $\frac{4}{3}$　　D. 5

4. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_7+a_9=16$，$a_4=1$，则a_{12}的值是　　(　　)

A. 15　　B. 30

C. 31　　D. 64

5. [2024·北京理工大学附中高二月考] 已知等差数列$\{a_n\}$满足$4a_3=3a_2$，则$\{a_n\}$中一定为零的项是　　(　　)

A. a_6　　B. a_4

C. a_{10}　　D. a_{12}

6. (多选题)在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，$a_1+a_2+a_3=21$，则　　(　　)

A. 公差为-4

B. $a_2=7$

C. 数列$\{a_n\}$为递增数列

D. $a_3+a_4+a_5=84$

7. [2024·江苏宿迁高二期中] 在等差数列$\{a_n\}$中，若$a_8=6$，$a_{11}=0$，则a_1的值为________.

8. -401是等差数列$-5,-9,-13,\cdots$的第________项.

素养提能篇

9. [2024·山东泰安高二期中] 首项为-12的等差数列，从第10项起开始为正数，则公差d的取值范围是　　(　　)

A. $d>\frac{8}{3}$　　B. $d<3$

C. $\frac{8}{3}\leqslant d<3$　　D. $\frac{4}{3}<d\leqslant\frac{3}{2}$

10. 在数列$\{a_n\}$中，若$a_1=1$，$a_2=\frac{1}{2}$，$\frac{2}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+2}}(n\in\mathbf{N}^*)$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为(　　)

A. $a_n=n(n+1)$

B. $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$

C. $a_n=\frac{1}{n}$

D. $a_n=n$

11. [2024·马鞍山高二期中] 设$\{a_n\}$是公差不为0的无穷等差数列，则“$\{a_n\}$为递减数列”是“存在正整数N_0，当$n>N_0$时，$a_n<0$”的　　(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

12. (多选题)[2024·重庆十八中高二月考] 对于数列$\{a_n\}$，若$a_1=1$，$a_4=2$，$a_{n+2}=a_n+2(n\in\mathbf{N}^*)$，则下列说法正确的是　　(　　)

A. $a_2=0$

B. 数列$\{a_n\}$是递增数列

C. 数列$\{a_{2n-1}\}$是等差数列

D. 数列$\{a_n+a_{n+1}\}$是等差数列

13. 等差数列5,8,11,…与等差数列3,8,13,…都有100项，那么这两个数列相同的项共有________项.

14. [2024·杭州二中高二月考] 数列$\{a_n\}$满足递推关系式$a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}$，且$a_1=2$，则$a_{2024}=$________.

15. 设 S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和,$S_n=2n^2-30n$.

(1)求 a_1,a_2;

(2)证明$\{a_n\}$是等差数列.

16. [2024·浙江宁波高二期中] 已知等差数列$-2,1,4,7,10,\cdots$,现在其每相邻两项之间插入一个数,使之成为一个新的等差数列$\{a_n\}$.

(1)求新数列$\{a_n\}$的通项公式.

(2)16 是新数列$\{a_n\}$中的项吗?若是,求出是第几项;若不是,请说明理由.

思维训练篇

17. 已知数列$\{a_n\}$是首项为 a,公差为 1 的等差数列,数列$\{b_n\}$满足 $b_n=\dfrac{1+a_n}{a_n}$.若对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$,都有 $b_n\geqslant b_5$ 成立,则实数 a 的取值范围是________.

18. 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=3$,$a_{n+1}=3-\dfrac{4}{a_n+1}$($n\in\mathbf{N}^*$),设数列 $b_n=\dfrac{1}{a_n-1}$.

(1)求证:数列$\{b_n\}$为等差数列;

(2)求数列$\{a_n\}$的通项公式.

第 2 课时　等差数列的性质与应用

基础夯实篇

1. 已知$\{a_n\}$为等差数列，$a_5=4$，则$a_4+a_6=$　(　　)

A. 4　　B. 6

C. 8　　D. 10

2. 已知数列$\{a_n\}$是等差数列，且$a_2+2a_3+a_8=32$，则$a_4=$　(　　)

A. 4　　B. 6

C. 8　　D. 10

3. 已知某等差数列共有 10 项，其奇数项之和为 15，偶数项之和为 30，则其公差 d 为　(　　)

A. 5　　B. 4

C. 3　　D. 2

4. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_4+a_8=20$，$a_7=12$，则$a_4=$　(　　)

A. 4　　B. 5

C. 6　　D. 8

5. 已知$\{a_n\}$为递增的等差数列，$a_3\cdot a_4=15$，$a_2+a_5=8$，若$a_m=21$，则$m=$　(　　)

A. 9　　B. 10

C. 11　　D. 12

6. 在等差数列$\{a_n\}$中，a_2，a_8 是方程 $x^2+mx-8=0$ 的两根，若$a_4+a_6=a_5^2+1$，则 m 的值为　(　　)

A. -6　　B. -2

C. 2　　D. 6

7. 在等差数列$\{a_n\}$中，已知 5 是 a_3 和 a_6 的等差中项，则$a_1+a_8=$________.

8. 已知$\{a_n\}$为等差数列，$a_1+a_3+a_5=105$，$a_2+a_4+a_6=99$，则$a_{22}=$________.

素养提能篇

9. [2024·河北唐山高二期末] 已知$\{a_n\}$，$\{b_n\}$均为等差数列，且$a_1=1$，$b_1=2$，$a_3+b_3=5$，则$a_{2024}+b_{2024}=$　(　　)

A. 2027　　B. 2026

C. 2025　　D. 2024

10. 中国古代有一个问题为“今有竹九节，下三节容量四升，上四节容量三升. 问中间二节欲均容各多少?”其中“欲均容”的意思是使容量变化均匀. 该问题中由上往下的第 2 节、第 3 节、第 8 节竹子的容积之和为　(　　)

A. $\frac{7}{2}$升　　B. $\frac{17}{6}$升

C. $\frac{109}{33}$升　　D. $\frac{133}{6}$升

11. (多选题)已知各项均为正数的等差数列$\{a_n\}$为递增数列，且$a_5=2$，则　(　　)

A. 公差 d 的取值范围是$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$

B. $2a_7=a_9+2$

C. $a_8+a_4>a_6+a_5$

D. $a_1+a_9=4$

12. (多选题)[2024·河北承德高二期中] 已知等差数列$\{a_n\}$的首项$a_1=2$，公差$d=8$，在$\{a_n\}$中每相邻两项之间都插入 k 个数，使它们和原数列的数一起按原顺序构成一个新的等差数列$\{b_n\}$，下列说法正确的是　(　　)

A. $a_n=8n-6$

B. 当 $k=3$ 时，$b_n=2n$

C. 当 $k=3$ 时，b_{29} 不是数列$\{a_n\}$中的项

D. 若 b_9 是数列$\{a_n\}$中的项，则 k 的值可能为 7

13. 已知数列$\{\log_3 a_n\}$是等差数列，若$\log_3 a_1+\log_3 a_2+\cdots+\log_3 a_{10}=10$，则$a_5a_6=$__________.

14. 在等差数列$\{a_n\}$中,若$a_3+a_8+a_{13}=12$,$a_3a_8a_{13}=28$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)求a_{23}的值.

15. 在数列$\{a_n\}$中,相邻两项a_n和a_{n+1}是一元二次方程$x^2+3nx+b_n=0(n\in\mathbf{N}^*)$的两根,若$a_1=2$,试求$b_{100}$的值.

思维训练篇

16. (多选题)在数列$\{a_n\}$中,若$a_n^2-a_{n-1}^2=p(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*,p$为常数),则称$\{a_n\}$为等方差数列,下列对等方差数列的判断正确的有 ( )

A. 若$\{a_n\}$是等方差数列,则$\{a_n^2\}$是等差数列

B. 数列$\{(-1)^n\}$是等方差数列

C. 若数列$\{a_n\}$既是等方差数列,又是等差数列,则数列$\{a_n\}$一定是常数列

D. 若数列$\{a_n\}$是等方差数列,则数列$\{a_{kn}\}$$(n\in\mathbf{N}^*,k$为常数)不是等方差数列

17. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$,且$a_4=\frac{\pi}{2}$,若函数$f(x)=\sin 2x+2\cos^2\frac{x}{2}$,记$y_n=f(a_n)$,则数列$\{y_n\}$的前7项和为________.

18. 对于无穷数列$\{c_n\}$,若对任意$m,t\in\mathbf{N}^*$,且$m\neq t$,存在$k\in\mathbf{N}^*$,使得$c_m+c_t=c_k$成立,则称$\{c_n\}$为“G数列”.

(1)若数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=2n$,试判断数列$\{b_n\}$是否为“G数列”,并说明理由;

(2)已知数列$\{a_n\}$为等差数列,若$\{a_n\}$是“G数列”,$a_1=8$,$a_2\in\mathbf{N}^*$,且$a_2>a_1$,求a_2的所有可能取值.

4.2.2　等差数列的前 n 项和公式

第 1 课时　等差数列的前 n 项和公式

基础夯实篇

1. 已知数列$\{a_n\}$为等差数列,且 $a_1=1$,$a_5=9$,则数列$\{a_n\}$的前 5 项和是　(　　)

A. 15　　B. 20

C. 25　　D. 35

2. 若等差数列$\{a_n\}$的前 7 项和为 70,则 a_1+a_7 等于　(　　)

A. 5　　B. 10

C. 15　　D. 20

3. 已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,若 $S_4=S_5=10$,则 $a_4=$　(　　)

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

4. [2024·山东青岛二中高二月考]已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,$a_3+2a_4+a_{13}=160$,则 $S_{11}-5a_6=$　(　　)

A. 240　　B. 180

C. 120　　D. 60

5. 记等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,$a_3+a_7=6$,$a_{12}=17$,则 $S_{16}=$　(　　)

A. 120　　B. 140

C. 160　　D. 180

6. 等差数列$\{a_n\}$中,S_n 为$\{a_n\}$的前 n 项和,$a_1=3$,$S_3=15$,则 $a_4=$________.

7. [2024·湖南长沙一中高二月考]已知数列$\{a_n\}$的前 5 项分别为 1,3,3,5,5,该数列从第 5 项起成等差数列,且其前 12 项和 $S_{12}=108$,则该等差数列的公差为________.

8. 在公差不为 0 的等差数列$\{a_n\}$中,S_n 为其前 n 项和,若 $S_{12}=3(a_3+2a_5+a_k)$,则正整数 $k=$________.

素养提能篇

9. [2024·福州高二期末]已知数列$\{a_n\}$为等差数列,其前 n 项和为 S_n,且 $a_3=7$,$\frac{S_{10}}{10}-\frac{S_5}{5}=10$,则 $S_9=$　(　　)

A. 63　　B. 72

C. 135　　D. 144

10. [2024·上海闵行区高二期中]在 1 和 2 之间插入 $2n$ 个数,组成首项为 1,末项为 2 的等差数列,若这个数列的前 $n+1$ 项和与后 $n+1$ 项和之比为 9∶13,则插入数的个数是　(　　)

A. 8　　B. 10

C. 12　　D. 14

11. (多选题)[2024·山东济宁一中高二月考]已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,公差 $d\neq 0$.若 $S_n\leqslant S_7(n\in\mathbf{N}^*)$,则　(　　)

A. $a_1<0$　　B. $d<0$

C. $a_7=0$　　D. $S_{15}\leqslant 0$

12. (多选题)将 1 到 1000 这 1000 个数中能被 2 除余 1 且被 7 除余 1 的数按从小到大的顺序排成一排,构成数列$\{a_n\}$,记其前 n 项和为 S_n,则 (　　)

A. $a_{10}-a_8=14$　　B. $a_{10}=127$

C. $S_{10}=640$　　D. $\{a_n\}$共有 72 项

13. 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$,$a_{n+1}-a_n=2(n\in\mathbf{N}^*)$,则 $a_4+a_7+a_{10}+\cdots+a_{3n+4}=$________.

14. 记 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和,已知 $a_2+a_3=-4,S_3=-3$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)求数列$\{a_n\}$的前 20 项和.

15. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=n^2-12n$.

(1)求证:$\{a_n\}$是等差数列;

(2)求数列$\{|a_n|\}$的前 n 项和 T_n.

思维训练篇

16. (多选题)[2024·湖南衡阳高二期末] 已知$\{a_n\}$,$\{b_n\}$均是公差不为 0 的等差数列,$a_1=3$ 且 $\dfrac{a_n-1}{b_n-1}=\dfrac{2}{3}$,记$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 S_n,T_n,则 ( )

A. $b_1=4$

B. $a_n=2n+1$

C. $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$为递增数列

D. $\dfrac{S_n+n}{T_n+2n}=\dfrac{2}{3}$

17. 定义:满足下列两个条件的有穷数列 $b_1,b_2,\cdots,b_n(n=2,3,4,\cdots)$为 n 阶“期待数列”.

①$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=0$,②$|b_1|+|b_2|+|b_3|+\cdots+|b_n|=1$.

试写出一个 3 阶“期待数列”________;若 2025 阶“期待数列”$\{b_n\}$是递增的等差数列,则$b_{2025}=$________.

18. 已知各项均为正数的数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,且 $S_n=\dfrac{1}{4}(a_n+1)^2$.

(1)求 a_n,S_n;

(2)求$\dfrac{2S_n+6}{a_n+3}$的最小值.

第 2 课时　等差数列的前 n 项和的性质与应用

基础夯实篇

1. 已知等差数列$\{a_n\}$是无穷数列,若$a_1<a_2<0$,则数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n　　(　　)

A. 无最大值,有最小值

B. 有最大值,无最小值

C. 有最大值,有最小值

D. 无最大值,无最小值

2. 在等差数列$\{a_n\}$中,已知公差$d=\frac{1}{2}$,且$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}=60$,则$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}=$　　(　　)

A. 145　　B. 150

C. 170　　D. 120

3. 等差数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 S_n,T_n,若$\frac{S_n}{T_n}=\frac{4n}{9n+3}$,则$\frac{a_{10}}{b_{10}}=$　　(　　)

A. $\frac{40}{93}$　　B. $\frac{38}{87}$

C. $\frac{17}{42}$　　D. $\frac{32}{81}$

4. 已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 40,前 $3n$ 项和为 420,则前 $2n$ 项和为　　(　　)

A. 140　　B. 180

C. 220　　D. 380

5. [2024・长沙雅礼中学高二期末] 在等差数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,其前 n 项和为 S_n,若$\frac{S_8}{8}-\frac{S_6}{6}=2$,则 S_{10} 等于　　(　　)

A. 10　　B. 100

C. 110　　D. 120

6. [2024・合肥庐阳高级中学高二月考] 在等差数列$\{a_n\}$中,若$\frac{a_9}{a_8}<-1$,且前 n 项和 S_n 有最大值,则 S_n 取得最大值时 n 的值为________.

7. 已知$\{a_n\}$为等差数列,S_n 为其前 n 项和,若 $S_3=9$,$a_4+a_5+a_6=7$,则 $S_9-S_6=$________.

8. 一支车队有 15 辆车,某天下午依次出发执行运输任务,第一辆车于 14 时出发,以后每间隔 10 min 发出一辆,假设所有的司机都连续开车,并都在 19 时停下来停止运输.已知每辆车都匀速行驶,且速度为 60 km/h,则这支车队当天一共行驶了________km.

素养提能篇

9. 苏州码子是中国早期民间的“商业数字”,被广泛应用于各种商业场合.苏州码子 0～9 的写法依次为〇、〡、〢、〣、〤、〥、〦、〧、〨、〩.某铁路的里程碑上所刻数字代表距离始发车站的里程,如某处里程碑上刻着“〦〇”代表距离始发车站 60 公里.已知每隔 3 公里摆放一个里程碑,若在 A 处里程碑上刻着“〥〤”,在 B 处里程碑上刻着“〩〦”,则从 A 处到 B 处的所有里程碑上所刻数字之和为　　(　　)

A. 1029　　B. 1125

C. 1224　　D. 1650

10. [2024・江苏淮安五校联盟高二期中] 已知等差数列$\{a_n\}$和等差数列$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 S_n 和 T_n,且$\frac{S_n}{T_n}=\frac{5n+63}{n+3}$,则使得$\frac{a_n}{b_n}$为整数的正整数 n 的个数为　　(　　)

A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 9

11. 已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 有最大值,若$(a_3-1)(a_4-1)=2$,$S_6=15$,则 $S_n\geqslant 0$ 时 n 的最大值为　　(　　)

A. 9　　B. 10　　C. 11　　D. 12

12. (多选题)设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,若$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=-1$,$S_1=32$,则下列说法正确的是　　(　　)

A. $a_n=-2n+34$,$n\in\mathbf{N}^*$

B. S_2,S_4-S_2,S_6-S_4 成等差数列,公差为-8

C. S_n 取得最大值时 n 的值为 16

D. $S_n\geqslant 0$ 时,n 的最大值为 33

13. 已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 377,项数 n 为奇数,且前 n 项中奇数项的和与偶数项的和之比为 7∶6,则$\{a_n\}$的中间项为________.

14. [2024·山东青岛二中高二月考]已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$S_4=-90$，$a_{10}=15$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求S_n的最小值，并指出n取何值时S_n取得最小值.

15. 某企业投资144万元建立一座蔬菜加工厂，第一年的支出为24万元，以后每年的支出比上一年增加8万元，每年销售蔬菜的收入为100万元，设$f(n)$(单位:万元)表示前n年的纯利润.($f(n)$=前n年的总收入-前n年的总支出-投资额)

(1)该企业从第几年开始获得纯利润?

(2)若五年后，该企业为开发新项目，决定出售该厂，现有两种方案：①年平均纯利润最大时，以96万元的价格出售该厂；②纯利润最大时，以32万元的价格出售该厂.哪种方案较合算?

思维训练篇

16. (多选题)设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_8=S_{12}$，且$(n+1)S_n<nS_{n+1}$，则 (　　)

A. 数列$\{a_n\}$为递增数列

B. S_{10}和S_{11}均为S_n的最小值

C. 存在正整数k，使得$S_k=0$

D. 存在正整数m，使得$S_m=S_{3m}$

17. [2024·浙江宁波镇海中学高二期中]设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$S_{11}>0$，$S_{12}<0$，则数列$\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}(1\leqslant n\leqslant 11)$中的最大项为第________项.

18. 已知等差数列$\{a_n\}$的公差为d，且$d\neq 0$，设S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，数列$\{b_n\}$满足$b_n=4S_n-2n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)若$a_1=-1$，$d=1$，且$b_n<a_n$，求n的所有可能取值；

(2)若数列$\{\sqrt{b_n}\}$也是公差为d的等差数列，求数列$\{(-1)^n b_n\}$的前n项和T_n.

4.3 等比数列

4.3.1 等比数列的概念

第1课时 等比数列的概念与通项公式

基础夯实篇

1. 数列 $1,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{1}{4},\cdots$ 的一个通项公式为 ( )

A. $a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

B. $a_n=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n}$

C. $a_n=(-1)^n\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$

D. $a_n=(-1)^{n+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$

2. [2024·河北衡水二中高二期中]已知等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_4=-8$，则公比 $q=$ ( )

A. 2　　B. -4

C. 4　　D. -2

3. 若数列 $-9,m,x,n,-16$ 是等比数列，则 x 的值是 ( )

A. 12　　B. ±12

C. -12　　D. -12.5

4. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1+a_3=10$，$a_4+a_6=\frac{5}{4}$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 ( )

A. $a_n=2^{4-n}$　　B. $a_n=2^{n-4}$

C. $a_n=2^{n-3}$　　D. $a_n=2^{3-n}$

5. "$b^2=ac$"是"a,b,c 成等比数列"的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

6. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，首项 $a_1<0$，若对任意正整数 n 都有 $a_{n+1}>a_n$，则公比 q 的取值范围是 ( )

A. $q>1$　　B. $0<q<1$

C. $\frac{1}{2}<q<1$　　D. $-1<q<0$

7. $\sqrt{5}-1$ 与 $\sqrt{5}+1$ 的等比中项是__________.

8. [2024·湖南常德一中高二期末]已知 $\{a_n\}$ 是等比数列，若 $a_2+a_4=8$，$a_3+a_5=32$，则公比 $q=$__________.

素养提能篇

9. 在各项均不为0的数列 $\{a_n\}$ 中，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_{n+1}-2a_n=0$，则 $\frac{2a_1+a_2}{2a_3+a_4}$ 等于 ( )

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

10. 在数列 $\{a_n\}$ 中，当 $n\geqslant2$ 时，$a_1,\frac{a_2}{a_1},\frac{a_3}{a_2},\cdots,\frac{a_n}{a_{n-1}},\cdots$ 构成首项为1，公比为3的等比数列，则 a_{100} 等于 ( )

A. 3^{100}　　B. 3^{90}

C. 3^{4950}　　D. 3^{5050}

11. 在各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_6=2a_5+3a_4$，若存在两项 a_m,a_k 使得 $\sqrt{a_ma_k}=3a_1$，则 $\frac{1}{m}+\frac{4}{k}$ 的最小值为 ( )

A. $\frac{7}{3}$　　B. $\frac{5}{2}$　　C. $\frac{9}{4}$　　D. 2

12. (多选题)[2024·浙江台州高二期末]已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 均是等比数列，则下列结论中正确的是 ( )

A. $\{a_n^2\}$ 是等比数列

B. $\{a_n+b_n\}$ 一定不是等差数列

C. $\{a_n\cdot b_n\}$ 是等比数列

D. $\{a_n+b_n\}$ 一定不是等比数列

13. (多选题)已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，则下列结论正确的是 ( )

A. 若 $a_1+a_3<0$，则 $a_1+a_2<0$

B. 若 $a_1a_2>0$，则 $a_2a_3>0$

C. 若 $a_1a_2<0$，则 $(a_2-a_1)(a_2-a_3)<0$

D. 若 $a_2>a_1>0$，则 $a_1+a_3>2a_2$

14. 若等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $6\sqrt{2}a_1=a_1a_2+a_1a_3+9$，则公比 q 的取值范围是____________.

15. 在等比数列$\{a_n\}$中,$a_4=2a_3$,$a_5-a_1=15$.

(1)求数列$\{a_n\}$的首项a_1和公比q;

(2)若$a_n>n+100$,求n的取值范围.

16. 在数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,$a_{n+1}=\frac{a_n+2}{a_n}$.

(1)若$b_n=\frac{a_n-2}{a_n+1}$,证明:数列$\{b_n\}$是等比数列;

(2)求数列$\{a_n\}$的通项公式.

思维训练篇

17. (多选题)[2024·福州高二期末] 设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,前n项积为T_n,并且满足$0<a_1<1$,$a_8a_9>0$,$a_8a_9+1<a_8+a_9$,则下列结论正确的是 ( )

A. $q>1$

B. $a_8a_{10}<1$

C. $T_{17}>1$

D. T_n的最小值为T_9

18. [2024·云南昆明高二期末] 对于给定的数列$\{c_n\}$,如果存在实常数p,q,使得$c_{n+1}=pc_n+q$对于任意$n\in\mathbf{N}^*$都成立,那么我们称数列$\{c_n\}$是“优美数列”.

(1)若$a_n=2n$,$b_n=3\cdot 2^n$,$n\in\mathbf{N}^*$,数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$是否为“优美数列”?若是,指出对应的实常数p,q;若不是,请说明理由.

(2)已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$,$a_n+a_{n+1}=3\cdot 2^n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$,若数列$\{a_n\}$是“优美数列”,求数列$\{a_n\}$的通项公式.